Colles de Maths - semaine 18 - MP*2

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Calculer
$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-x}\left(1+a_1x+\dots+a_nx^n\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Exercice 2 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|\!|\!|u|\!|\!| \leqslant 1$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} u_k\right)_p$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})$.
Indication : On pourra commencer par montrer que $E = \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Im}(u-\operatorname{Id})$.

Exercice 3 Soit E un espace euclidien, C un convexe fermé non vide de E, $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p(x) \in C$ tel que $||x-p(x)|| = d(x,C)$.
   Indication : Pour l'unicité, on pourra utiliser l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, $2\,AB^2 + 2\,BC^2 = AC^2 + BD^2$.
2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a $\langle x-p(x), y-p(x)\rangle \leqslant 0$.
3. Montrer que l'application p est 1-lipschitzienne.

Bonus : Montrer par des contre-exemples la nécessité des hypothèses.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E autoadjoints, commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous les f_i.
Variante : En remplaçant autoadjoints par trigonalisables, montrer qu'il existe une base orthonormée de E qui trigonalise tous les f_i.

Exercice 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ ait tous ses termes diagonaux égaux.

Exercice 6 Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout valeur propre complexe λ de A, $|\lambda| < 1$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive S telle que $S - AS^tA = B$.